線形作用素について

東京理科大学 理学部第二部 数学科 准教授 齊藤（さいとう） 功（いさお）

関数解析学の一分野であるヒルベルト空間上の線形作用素について，行列や線形代数学を学んでいない高校生の読者も念頭に基本的な内容から解説したいと思います．

■ 平面上の線形作用素

$\mathbf{R}$ を実数の集合とし，平面を

$$\mathbf{R}^2 = \{(x_1, x_2) \ : x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$$

とします．平面上の点（ベクトル）

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$$

と実数 k に対し，和，実数倍，内積，ノルム（大きさ）が

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$k\boldsymbol{x} = (kx_1, kx_2)$$

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

と定義されています．ここで，内積が０となるベクトルは直交しています．また，$\mathbf{R}^2$ の点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ が点 $\boldsymbol{x}$ に収束するとは

$$\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\| = 0$$

となることです．

$\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^2$ への作用素 T が線形であるとは，$\mathbf{R}^2$ 上の点 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$，実数 α，β に対し

$$T(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha T(\boldsymbol{x}) + \beta T(\boldsymbol{y}) \qquad (1)$$

が成立することです．（作用素論では関数や写像ではなく作用素という用語を用います．）線形性は数学や物理において多くの場面で登場します．

点 (x, y) を縦に $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表示し

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \ T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

とします．このとき T の線形性を用いると

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= T\left(x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= x_1 T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となります．行列の演算を

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

と定義すると

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

と表せます．さらに T は連続になることも確認できます．（T が連続とは各点 $\boldsymbol{x}$ で点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ が $\boldsymbol{x}$ に収束するとき，$\{T\boldsymbol{x}_k\}$ が $T\boldsymbol{x}$ に収束することです．）

具体的な線形作用素について考えましょう．対角行列（対角成分以外は０となる行列）

$$S_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

は

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$$

となるので第１成分を４倍，第２成分を−２倍にする単純な作用素です．それに比べて

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

は

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+3x_2\\ 3x_1+x_2\end{pmatrix}$$

となるので，より複雑な作用素と思うかもしれません．以下検討しましょう．

$\boldsymbol{e}_1=(1,0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0,1)$ は大きさが 1 で互いに直交します．さらに各点 $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ を用いて

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2$$

と表せます．（点 $\boldsymbol{x}$ の通常の座標 (x_1, x_2) は $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ を用いた座標と言えます．）このような 2 つのベクトルを正規直交基底と言います．$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ を反時計回りに 45° 回転させた

$$\boldsymbol{f}_1=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}),\ \boldsymbol{f}_2=(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$$

は，やはり正規直交基底となります．なぜなら $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ は大きさが 1 で互いに直交し，各点 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2)$ は

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}+\frac{-x_1+x_2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

と表せるからです．$\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ を用いた新たな座標を $(\ ,\ )_{\boldsymbol{f}_1\boldsymbol{f}_2}$ とすると

$$(x_1,x_2)=\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}},\frac{-x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)_{\boldsymbol{f}_1\boldsymbol{f}_2}$$

となります．(2) の S_2 は通常の座標で表された点をどのように写すかという行列表現ですが，座標 $(\ ,\ )_{\boldsymbol{f}_1\boldsymbol{f}_2}$ で表すと S_2 はどのような行列表現になるのか確かめてみましょう．

新座標 $(x_1, x_2)_{\boldsymbol{f}_1\boldsymbol{f}_2}$ で表される点は $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ の定義より

$$(x_1,x_2)_{\boldsymbol{f}_1\boldsymbol{f}_2}=x_1\boldsymbol{f}_1+x_2\boldsymbol{f}_2=\left(\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}},\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)$$

と通常の座標で表せます．S_2 は，この点を

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\\ \frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4x_1+2x_2}{\sqrt{2}}\\ \frac{4x_1-2x_2}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

に写しますが，座標 $(\ ,\ )_{\boldsymbol{f}_1\boldsymbol{f}_2}$ で表すと

$$\begin{pmatrix}\frac{4x_1+2x_2}{\sqrt{2}}\\ \frac{4x_1-2x_2}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=4x_1\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}-2x_2\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$=(4x_1,-2x_2)_{\boldsymbol{f}_1\boldsymbol{f}_2}$$

となります．つまり S_2 は新座標のもとでは第 1 成分を 4 倍に第 2 成分を−2 倍とする作用素で，行列表現は $\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ となり S_1 と同様な構造を持ちます．

つまり座標を変更することにより，作用素の構造が明確になります．

それでは，どのような行列がこのように対角化できるのでしょうか．一般に

$$T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

は

$$a_{12}=a_{21}$$

となるとき，新たな正規直交基底を選び座標を変えることにより

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

と表現でき構造が明確になります（対角化）．このとき λ_1, λ_2 は T の固有値となります．ちなみに λ が線形作用素 T の固有値であるとは $\mathbf{0}=(0,0)$ でない $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2$ が存在して

$$T\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$$

となることです．

■ 3 次元空間上の線形作用素

3 次元空間

$$\mathbf{R}^3=\{(x_1,x_2,x_3)\ :x_1,x_2,x_3\in\mathbf{R}\}$$

上の点（ベクトル）についても，平面と同様に，和，実数倍，内積，ノルムが定義されます．さらに $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ への作用素が線形である定義も (1) と同様です．この $\mathbf{R}^3$ 上の線形作用素 T は連続となり

$$T=(a_{ij})_{i,j=1}^3=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

と表せます．（$\mathbf{R}^2$ の場合と同様に証明できます．）ただし行列演算は

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{pmatrix}$$

とします．上記の行列で a_{ij} を T の ij 成分と言います．

平面の場合と同様に，T が各 i, $j=1, 2, 3$ に対して

$$a_{ij} = a_{ji}$$

を満たすとき，正規直交基底

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0), \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)), \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$$

による通常の座標から別の正規直交基底による座標を採用することにより

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

と対角化することができます．λ_1, λ_2, λ_3 は T の固有値です．（固有値の定義は $\mathbf{R}^2$ の場合と同様です．）

■ 複素数への拡張

$\mathbf{C}$ を複素数の集合とし

$$\mathbf{C}^3 = \{(x_1, x_2, x_3)\ : x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{C}\}$$

とします．$\mathbf{C}^3$ における和，複素数倍，ノルムの定義は $\mathbf{R}^3$ と同じですが，内積は

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{C}^3$$

に対し，

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + x_3\overline{y}_3$$

と定義します．（$\overline{y}_1$ は y_1 の複素共役です．）このことにより，ノルム

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2}$$

は 0 以上になります．

$\mathbf{R}^3$ の場合と同様に $\mathbf{C}^3$ 上の線形作用素 T も各成分が複素数である行列で表せ連続となります．（線形作用素の定義は（1）と同様ですが α, β は複素数です．行列演算も同じです．）この $T=(a_{ij})_{i,\,j=1}^3$ に対して，共役作用素 T^* を ij 成分を $\overline{a}_{ji}$ とした行列で表される作用素とします．（T の行列を転置させて複素共役をとったものが T^* の行列です．）T^* については，各 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$$\in$$\mathbf{C}^3$ に対し

$$\langle T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, T^*\boldsymbol{y} \rangle \qquad (3)$$

が成立し，この式を T^* の定義とすることもできます．（共役作用素 T^* について上式が成立することは計算すればわかります．逆に上式が成立するとき $\boldsymbol{x}$=$\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{y}$=$\boldsymbol{e}_j$ とすると，T の ji 成分が T^* の ij 成分の複素共役となることがわかり，T は共役作用素となります．）

また a_{ij}=$\overline{a}_{ji}$ つまり

$$T^* = T \qquad (4)$$

となる作用素を自己共役作用素，T^*T=TT^* つまり各 $\boldsymbol{x}$$\in$$\mathbf{C}^3$ に対し

$$T^*(T(\boldsymbol{x})) = T(T^*(\boldsymbol{x})) \qquad (5)$$

をみたす作用素を正規作用素と言います．自己共役作用素は正規となり，どちらも正規直交基底を変更することにより対角化できます．対角成分の固有値は自己共役作用素の場合は実数，正規作用素の場合は複素数です．

$\mathbf{C}^2$, $\mathbf{C}^3$ を拡張した $\mathbf{C}^n$ 上の線形作用素も連続となり n×n 行列 $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ で表現できます．共役作用素，自己共役作用素，正規作用素についても同様の定義ができ対角化についても同様の結果が成立します．

■ 無限次元空間 l^2 上の線形作用素

$\mathbf{C}^n$ を無限次元に拡張した複素数列

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots)$$

の集合を考えます．和や複素数倍は $\mathbf{C}^n$ と同様に定義します．一方，内積とノルム

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\overline{y}_k$$

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}$$

が収束するように $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2$ と $\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^2$ が収束するという条件を加えます．（この無限和が収束すれば内積も収束します．）このような複素数列の集合を l^2 と言います．第 k 成分が 1 で他の成分が 0 である複素数列を $\boldsymbol{e}_k$ とすると $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, …は大きさが 1 で互いに直交し，各 $\boldsymbol{x}$ に対し

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbf{e_k}$$

つまり

$$\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{x} - \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{e_k}\| = \mathbf{0}$$

が成立し正規直交基底となります．l^2 から l^2 への線形作用素 T は $\mathbf{C}^n$ の場合と同様に無限行列を用いて

$$T = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

と表せますが，連続になるとは限らないところが異なります．よって，以下は連続な線形作用素のみを扱います．共役作用素，自己共役作用素，正規作用素の定義は $\mathbf{C}^n$ の場合と同様で，共役作用素 T^* の定義が（3）と同値となることも同じです．ただし，$\mathbf{C}^n$ の場合と異なり正規作用素が対角行列で表現できるとは限

りません．ただ，正規性だけではなく以下の述べるコンパクト性を持つ作用素は対角行列で表現できます．

l^2 の点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}=\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \cdots\}$ が有界であるとは，ある定数 $M>0$ が存在して，すべての自然数 k に対して $\|\boldsymbol{x}_k\|\leq M$ となることです．また，点列 $\{\boldsymbol{y}_k\}$ の部分列とは，$\{\boldsymbol{y}_k\}$ の中から無限個の項を選び，順番を変えずに並べてできる点列のことです．例えば偶数番目の項を選ぶ $\{\boldsymbol{y}_{2k}\}$ は部分列の一例です．

l^2 上の作用素 T がコンパクトであるとは，どの有界点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ に対しても，$\{T\boldsymbol{x}_k\}$ が収束する部分列を持つということです．（他の空間上でも定義は同じです．）

有限次元である $\mathbf{C}^n$ 上の線形作用素はコンパクトとなり l^2 上の連続な線形作用素 T は値域 $\{T\boldsymbol{x}\,;\boldsymbol{x}\in l^2\}$ が有限次元ならコンパクトとなります．

正規なコンパクト作用素 T は，すべての元を $\mathbf{0}=(0, 0, 0, \cdots)$ に写すゼロ作用素を取り除いた主要部分は正規直交基底を選びなおした座標により対角行列

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

で表現できます．（上の行列で空欄は 0 を表します．また λ_n が有限個で終わる場合やゼロ作用素や対角行列の部分がない場合もあります．）コンパクトでない正規作用素 T は対角行列で表現できるとは限りませんが，後述するスペクトル分解定理で構造が判明します．

■ ヒルベルト空間上の線形作用素

今まで述べてきた $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{C}^3$, $\mathbf{C}^n$, l^2 はどれも和，定数倍，内積が定義されています．大学数学の範囲になりますが $(0, 1)$ でルベーグ 2 乗可積分な複素数値可測関数の集合 $L^2(0, 1)$ に属する $f(x)$, $g(x)$ に対しても和，複素数倍が自然に定義でき内積を

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$$

と定義できます．他の例も含めて，これらを統一的に扱うために抽象化します．

まず，和と複素数倍が満たすべき規則を挙げて公理化した（複素）線形空間を紹介しましょう．

X の元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$，複素数 α に対して，和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in X$，複素数倍 $\alpha\boldsymbol{x}\in X$ が定義され次を満たすとき X を（複素）線形空間と言います．ただし，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\in X$, $\alpha, \beta\in\boldsymbol{C}$ とします．

(L1) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$

(L2) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$

(L3) 零元 $\mathbf{0}\in X$ が存在して、すべての $\boldsymbol{x}\in X$ に対して $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$ が成立

(L4) 各 $\boldsymbol{x}\in X$ に対して $-\boldsymbol{x}\in X$ が存在して $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$ が成立

(L5) $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$, $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$

(L6) $(\alpha\beta)\boldsymbol{x}=\alpha(\beta\boldsymbol{x})$

(L7) $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$

抽象的な線形空間に次元の概念が導入できます．X の元 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が一次独立とは，この中のどの元も残りの $n-1$ 個の元を用いて表せないことです．言い換えると複素数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ が

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n=\mathbf{0}$$

を満たすならば必ず

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$$

となることです．なぜならば，このことが成立せずに例えば $\alpha_1\neq 0$ とすると

$$\boldsymbol{x}_1=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\boldsymbol{x}_2-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\boldsymbol{x}_3-\cdots\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\boldsymbol{x}_n$$

となり x_1 が他の $\{x_2, x_3, \cdots, x_n\}$ の一次結合で表せるからです．（$\alpha_2\neq 0$ などの場合も同様です．）

n 個の一次独立な元は存在するが $n+1$ 個の一次独立な元が存在しないとき X は n 次元であると言い，どんな自然数 n に対しても n 個の一次独立な元が存在するとき，X を無限次元と言います．

n 次元線形空間で n 個の一次独立な元 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ をとると，どの $\boldsymbol{x}$ に対しても複素数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ が存在して一意に

$$\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\alpha_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n \qquad (6)$$

と表せます．ただし，この段階では内積やノルムが定義されていないので各 $\boldsymbol{e}_k$ の大きさや直交性は議論できません．

次に内積が満たすべき規則を挙げて公理化した内積空間を紹介します．線形空間 X の元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し複素数 $\langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$ が対応して次を満たすとき X を（複素）内積空間と言います．ただし，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\in X$, $\alpha\in\boldsymbol{C}$ とします．

(I1)　$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$

(I2)　$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる

(I3)　$\langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$

(I4)　$\langle \alpha \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$

(I5)　$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle}$

ここで，ノルムを $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$ と定義します．

このとき X の点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ が $\boldsymbol{x}$ に収束するとは

$$\lim_{k \to \infty} \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\| = 0$$

となることです．

X が n 次元内積空間であるとき，正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{e}_n$ が存在します．このとき，どの $\boldsymbol{x}$ に対しても複素数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ が存在して一意に（6）のように表せます．$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}$ のこの正規直交基底による座標（$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$）を同一視することにより X は内積空間である $\mathbf{C}^n$ と同一視できます．（n 次元線形空間も同様に内積が定義されていない線形空間としての $\mathbf{C}^n$ と同一視できます．）この座標を用いて X 上の線形作用素は $n \times n$ 行列で表現できます．行列について調べることにより $\mathbf{R}^n$ や $\mathbf{C}^n$ だけではなく抽象的な有限次元線形空間，有限次元内積空間上の線形作用素について理解が得られます．

次に完備性について紹介します．X の点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ がコーシー列であるとは

$$\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_j\| \to 0 \quad (k, j \to \infty)$$

となることです．

コーシー列が必ず収束することを完備と言い，完備な内積空間をヒルベルト空間と言います．完備性は空間に穴が空いていないことを表しています．（もし，空間に穴が開いているなら穴に近づく点列はコーシー列だが極限が存在せず収束しないので，完備性が成立しません．）

具体例である $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{C}^3$, $\mathbf{C}^n$, l^2, $L^2(0, 1)$ はすべて，ヒルベルト空間の公理をみたすので，ヒルベルト空間について得られた結果はこれらの具体例すべてに対して成立し，一般的な結果となります．

ヒルベルト空間 X から X への作用素の線形性を式（1）と同様に定義します．l^2 の場合と同様に線形作用素が連続となるとは限らないので以下連続な線形作用素のみ考えます．

無限次元ヒルベルト空間 X が可分（大学数学の話になりますが高々可算な稠密部分集合が存在すること）という条件をみたすとき正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\cdots$が存在します．このとき X の各元 $\boldsymbol{x}$ に対し

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathbf{e_k}$$

と表せ $\boldsymbol{x}$ と l^2 の元となる

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots)$$

を同一視できます．この同一視により X と l^2 が同一視できます．よって，X 上の作用素は l^2 上の作用素とみなせます．以下の多くの結果は X が可分でなくても成立しますが簡単のため可分性を仮定します．l^2, $L^2(0, 1)$ は可分となります．

l^2 の場合と同様に X 上の共役作用素，自己共役作用素，正規作用素，コンパクト作用素を（3）（4）（5）などで定義でき，コンパクトな正規作用素は適切な正規直交基底をとることにより対角行列とゼロ作用素の直和で表せます．（対角行列のみの場合もゼロ作用素のみの場合もあります．）正規なコンパクト作用素を対角化したとき対角線上の実数または複素数は固有値でしたが，次に固有値を含む集合であるスペクトルを定義します．作用素 T のスペクトル $\sigma(T)$ に複素数 λ が属するとは，

$$(T - \lambda I)S = S(T - \lambda I) = I$$

となる作用素 S が存在しないこと，つまり $T - \lambda I$ が逆作用素を持たないということです．（上式の I は $\boldsymbol{x}$ に $\boldsymbol{x}$ を対応させる恒等作用素です．）

有限次元空間上の線形作用素については $\sigma(T)$ は固有値の集合と一致しますが無限次元空間ではそうとは限りません．また，T が自己共役ならば $\sigma(T)$ は実数の集合に含まれます．

専門的な内容になるので詳しくは述べませんが，コンパクトを仮定しない一般の正規作用素 N についてはスペクトル $\sigma(N)$ 上に定義されたスペクトル測度 E を用いて

$$N = \int_{\sigma(N)} z dE(z)$$

と表せ，その構造は明確になります（スペクトル分解定理）．また，$\sigma(N)$ 上の連続関数 $f(z)$ に対して $f(N)$ を

$$f(N) = \int_{\sigma(N)} f(z) dE(z)$$

とスペクトル分解定理を用いて定義します．（実際は連続関数よりも一般的な関数に対しても定義できます．）

■ 作用素不等式，正規作用素の拡張

正規作用素を一般化した作用素を紹介する前に作用素に順序を導入します．ヒルベルト空間 X 上の自己

共役作用素 A が正作用素であることを

$$\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \geq 0 \quad (\boldsymbol{x} \in X)$$

で定義し $A \geq 0$ と表記します．ちなみに任意の作用素 T に対し T^*T や TT^* は正作用素です．さらに正作用素 A, B に対して順序 $A \geq B$ が成立することを

$$A - B \geq 0$$

で定義します．

$A \geq 0$ のとき $\sigma(A)$ のどの元も 0 以上の実数となります．$p \geq 0$ に対し x^p は $\sigma(A)$ 上の連続関数なのでスペクトル分解定理を用いて A^p が定義でき $A^p \geq 0$ となります．以下，$p \geq 0$ とします．

作用素不等式では次のレウナー - ハインツの不等式，東京理科大学教授であられた古田孝之先生による古田不等式が有名です．

レウナー-ハインツの不等式

$A \geq B \geq 0$ ならば任意の $p \in [0,1]$ に対して $A^p \geq B^p$ が成立する．

古田不等式

$A \geq B \geq 0$ なら $p, r \geq 0, q \geq 1, (1+r)q \geq p+r$ をみたす任意の p, r, q に対して

$$(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (B^{\frac{r}{2}} B^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

$$(A^{\frac{r}{2}} A^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

が成立する．

古田不等式で $r=0$ とするとレウナー - ハインツの不等式となります．

次は正規作用素の拡張となる作用素を紹介します．X 上の作用素 S がサブ正規であるとは，X を含むヒルベルト空間 Y と Y 上の正規作用素 N が存在して X 上では $S=N$ となること，つまり正規な拡張が存在することです．正規作用素はサブ正規になります．

また，X 上の作用素 T が p ハイポ正規であるとは，

$$(T^*T)^p \geq (TT^*)^p$$

となることを言い，特に $p=1$ のときハイポ正規作用素と言います．T が無限大ハイポ正規作用素とは，すべての $p \geq 0$ に対し上式が成立することです．正規作用素は無限大ハイポ正規となり，サブ正規作用素はハイポ正規となります．

正規でないサブ正規作用素の具体例として l^2 上の片側シフト作用素

$$U_+ : (x_1, x_2, x_3, \dots) \longmapsto (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

があります．これは l^2 で座標を右に一つずらす作用素です．U_+ を l^2 上で行列表現すると

$$U_+ = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

となります．

U_+ が正規でないことは，U_+^* を求め $U_+^*U_+ - U_+U_+^*$ を計算して確かめることができます．次に正規な拡大があることを確認しましょう．l^2 の元の成分をマイナス方向にまで広げた

$$(\dots, x_{-1}, x_0, \hat{x_1}, x_2, x_3, \dots)$$

の集合を $l^2_\pm$ とします．ただし $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^2$ が収束するという条件をつけ，和，複素数倍，内積は l^2 と同様に定義します．（ヒルベルト空間になります．）$l^2_\pm$ 上の両側シフト作用素 $U_\pm$:

$$(\dots, x_0, \hat{x_1}, x_2, \dots) \longmapsto (\dots, x_{-1}, \hat{x_0}, x_1, \dots)$$

は U_+ の拡大となり正規となることも計算すればわかります．（ただし，上式で ^ は第 1 成分を表します．$U_\pm$ は $l^2_\pm$ で座標を右に一つずらす作用素です．）さらに U_+ は無限大ハイポ正規となることも確認できます．

ちなみに $U_\pm$ を $l^2_\pm$ 上で行列表現すると

$$U_\pm = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ & & 1 & \boxed{0} & & \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & & 1 & \ddots \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

となります（$\boxed{0}$ は (1,1) 成分が 0 であることを示しています．）

U_+ 以外にも正規作用素ではないサブ正規作用素の重要な具体例が存在し，ハイポ正規作用素等についても同様です．これらの作用素を調べることにより様々な具体例を統一的に扱うことができます．これらの作用素にはスペクトル分解定理を適応できず未解明な点が数多くありますが様々な研究がなされています．